

# Нелинейные уравнения и сопряженные задачи

Лектор: д.ф.м.н., профессор  
Темирбеков Н.М.

Пусть имеется неоднородное уравнение

$$Au = f \quad (9.1)$$

где  $A$  - линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения  $D(A) \subset H$ . Предположим, что задача (9.1) разрешима, т.е. существует обратный оператор  $A^{-1}$  на элементах  $f \in H$ . Наряду с задачей (9.1), которую назовем *невозмущенной*, введем в рассмотрение задачу *возмущенную* где возмущенный оператор имеет ту же область определения  $D(A)$ ,  $f_s \in H$ .

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon\delta A, \quad f_\varepsilon = f + \varepsilon\delta f, \quad (9.3)$$

где  $\varepsilon$  - числовой параметр

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots. \quad (9.4)$$

$$(A + \varepsilon\delta A)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = f + \varepsilon\delta f. \quad (9.5)$$

$$Au_0 = f,$$

$$Au_1 = \delta f - \delta Au_0, (9.6)$$

$$Au_i = -\delta Au_{i-1}, i = 2, 3, \dots$$

$$u_\varepsilon^{(N)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^N u_N, (9.7)$$

то функцию  $u_\varepsilon^{(N)}$  называют  $N$  — м приближением к  $u_\varepsilon$ .

$$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, A_0 = A, (9.8)$$

$$f_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i, f_0 = f,$$

где  $A_i: H \rightarrow H$  - заданные линейные операторы,  $f_i \in H$ .

$$Au_0 = f,$$

$$Au_1 = f_1 - A_1 u_0,$$

$$Au_2 = f_2 - A_1 u_1 - A_2 u_0, (9.9)$$

.....

$$Au_n = f_n - \sum_{k=1}^n A_k u_{n-k}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, x \in (0,1), \quad (9.10)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где  $f \in L_2(0,1)$ .

Рассмотрим далее возмущенную задачу

$$-\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon g(x)u_\varepsilon = f_\varepsilon, x \in (0,1) \quad (9.11)$$

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon(1) = 0,$$

где  $f_\varepsilon = f + \varepsilon \delta f$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Здесь  $\delta f \in L_2(0,1)$ ,  $g$  кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию  $g(x) \geq 0$ . (9.12)

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2 u_0}{dx^2} &= f, u_0(0) = u_1(1) = 0, \\
-\frac{d^2 u_1}{dx^2} &= \delta f - g u_0, u_1(0) = u_1(1) = 0, \\
-\frac{d^2 u_i}{dx^2} &= -g u_{i-1}, u_i(0) = u_i(1) = 0, i = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Тогда решение возмущенной задачи найдем в форме  $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$ . (9.14)

Решение невозмущенной задачи (9.10) записывается в явном виде

$$u = x \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''. \quad (9.15)$$

Отсюда без труда можно найти все члены ряда (9.14) вплоть до  $n = N$ , имея в виду получение решения  $N$ -го порядка точности по  $\varepsilon$ .

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 100x, x \in (0,1), \quad (9.16)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

а в качестве возмущенной задачи (9.11) возьмем следующую:

$$-\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon \sin \pi x u_\varepsilon(x) = 100x + \varepsilon 100 \sin \pi x, x \in (0,1), \quad (9.17)$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

Таким образом, здесь  $f = 100x$ ,  $\delta f = 100 \sin \pi x$ ,  $g(x) = \sin \pi x$ .

Система уравнений (9.13) (для  $i = 0,1,2$ ) в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2u_0}{dx^2} = 100x, \quad u_0(0) = u_0(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2u_1}{dx^2} = 100 \sin \pi x - \sin \pi x u_0(x), \quad u_1(0) = u_1(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2u_2}{dx^2} = -\sin \pi x u_1(x), \quad u_2(0) = u_2(1) = 0, \quad (9.18)$$

$$u_\varepsilon^{(1)} = u_0 + \varepsilon u_1, \quad u_\varepsilon^{(2)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2.$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{c} \|f\|, \quad (9.19)$$

Где

$$\|u\| = \left( \int_0^1 u^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad c = \sqrt{\frac{189}{43}}.$$

В самом деле, из (9.15) получаем равенство

$$\|u\|^2 = \int_0^1 \left\{ x \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right\}^2 dx = I_1 + I_2 + I_3, \quad (9.20)$$

Где

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx,$$

$$I_3 = -2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) \int_0^1 x \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) dx.$$

Для  $I_1$  имеем

$$I_1 = \frac{1}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2. \quad (9.21)$$

Для  $I_2$  справедливо неравенство

$$I_2 \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \left( \int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 dx \leq \int_0^1 dx \left( \int_0^x \left( \int_0^{x'} dx'' \right)^{1/2} \left( \int_0^{x'} f^2(x'') dx'' \right)^{1/2} dx' \right)^2 \leq \frac{\|f\|^2}{9},$$

То

$$I_2 \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{\|f\|^2}{27} \quad (9.22)$$

Для  $I_3$  интегрированием по частям получаем

$$I_3 = -2 \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) \left( \frac{1}{2} \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left( \int_0^x f(x'') dx'' \right) dx \right) = \\ - \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) + \int_0^1 x^2 \left( \int_0^x f(x'') dx'' \right) dx \cdot \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''.$$

$$\int_0^1 x^2 (\int_0^x f(x'') dx'') dx \leq \int_0^1 x^2 (\int_0^x dx'')^{1/2} (\int_0^x f^2(x'') dx'')^{1/2} dx \leq \|f\| \int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{2}{7} \|f\|,$$

$$\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \leq \int_0^1 (\int_0^{x'} dx'')^{1/2} (\int_0^{x'} f^2(x'') dx'')^{1/2} dx' \leq \|f\| \int_0^1 (x')^{1/2} dx' = \frac{2}{3} \|f\|,$$

То

$$I_3 \leq - \left( \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right)^2 + \frac{4}{21} \|f\|^2 \quad (9.23)$$

Подставляя оценки (9.21), (9.23) в (9.20), получаем

$$\|u\|^2 \leq \left( \frac{1}{27} + \frac{4}{21} \right) \|f\|^2 = \frac{43}{189} \|f\|^2,$$

Откуда следует неравенство (9.19).

Аналогичные оценки получаются и для  $u_1, u_2, \dots$  из (9.13)

$$\|u_1\| \leq \frac{1}{c} \|\delta f - gu_0\|, \quad (9.24)$$

$$\|u_i\| \leq \frac{1}{c} \|gu_{i-1}\|, \quad i = 2, 3, \dots$$

Поскольку в нашем примере  $g = \sin \pi x \leq 1$ , то

$$\|u_i\| \leq \frac{1}{c} \|u_{i-1}\|, \quad i = 2, 3, \dots$$

Отсюда последовательно получим

$$\|u_\varepsilon\| \leq \|u_0\| + |\varepsilon| \|u_1\| + c \|u_1\| \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{|\varepsilon|}{c}\right)^i, \quad (9.25)$$

Который сходится при  $|\varepsilon| < c$ .

Таким образом, достаточным условием сходимости ряда возмущений (9.14) является условие:

$$|\varepsilon| < c, \quad (9.26)$$

Где  $c = \sqrt{189/43}$ .

## Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.